



**Probleme central de la Olimpiada Internațională de  
Matematică (POM) din anul 2011**

**Problema 1** (propusă de România) *Se consideră un polinoim*  $P(x)$  *cu coeficienți reali și gradul cel puțin 2. Să se arate că există un număr natural*  $n$  *astfel încât*  $P(x^n)$  *să fie divizibil cu*  $x^2 + 1$ .

**Soluția:**

Notăm prin  $P_0(x)$  polinoimul constant egal cu 1.  
 Notăm prin  $P_1(x)$  polinoimul constant egal cu  $x^2 + 1$ .  
 Notăm prin  $P_2(x)$  polinoimul constant egal cu  $x^4 + 2x^2 + 1$ .  
 Notăm prin  $P_3(x)$  polinoimul constant egal cu  $x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$ .  
 Notăm prin  $P_4(x)$  polinoimul constant egal cu  $x^8 + 4x^6 + 6x^4 + 4x^2 + 1$ .  
 Notăm prin  $P_5(x)$  polinoimul constant egal cu  $x^{10} + 5x^8 + 10x^6 + 10x^4 + 5x^2 + 1$ .  
 Notăm prin  $P_6(x)$  polinoimul constant egal cu  $x^{12} + 6x^{10} + 15x^8 + 20x^6 + 15x^4 + 6x^2 + 1$ .

**Observații:**

**Observații adiționale:**

Notăm prin  $P(x)$  polinoimul constant egal cu 1.

**SOLUȚIA**

1.  $P(x)$  este divizibil cu  $x^2 + 1$ .
2.  $P(x^2)$  este divizibil cu  $x^2 + 1$ .
3.  $P(x^{2^k})$  este divizibil cu  $x^2 + 1$  pentru orice număr natural  $k$ .
4.  $P(x^{2^k})$  este divizibil cu  $x^2 + 1$ .
5.  $P(x^{2^k})$  este divizibil cu  $x^2 + 1$  pentru orice număr natural  $k$ .
6.  $P(x^{2^k})$  este divizibil cu  $x^2 + 1$  pentru orice număr natural  $k$ .
7.  $P(x^{2^k})$  este divizibil cu  $x^2 + 1$  pentru orice număr natural  $k$ .
8.  $P(x^{2^k})$  este divizibil cu  $x^2 + 1$  pentru orice număr natural  $k$ .
9.  $P(x^{2^k})$  este divizibil cu  $x^2 + 1$  pentru orice număr natural  $k$ .
10.  $P(x^{2^k})$  este divizibil cu  $x^2 + 1$  pentru orice număr natural  $k$ .
11.  $P(x^{2^k})$  este divizibil cu  $x^2 + 1$  pentru orice număr natural  $k$ .
12.  $P(x^{2^k})$  este divizibil cu  $x^2 + 1$  pentru orice număr natural  $k$ .
13.  $P(x^{2^k})$  este divizibil cu  $x^2 + 1$  pentru orice număr natural  $k$ .
14.  $P(x^{2^k})$  este divizibil cu  $x^2 + 1$  pentru orice număr natural  $k$ .